

Simplificação de Expressões

Mapa de Karnaugh

Prof^o José W. R. Pereira

jose.pereira@ifsp.edu.br

josewrpereira.github.io/docs



Índice

1. Simplificação lógica por método gráfico - Mapa de Karnaugh
2. Organização por adjacência lógica (Código Gray)
3. Agrupamento de mintermos (laços - *looping*)
4. Eliminação de variáveis
5. Construção de expressões simplificadas - Casos Irrelevantes - “*Don't Care*”

Perguntas Mediadoras

1. Por que a organização das células no Mapa de Karnaugh deve seguir obrigatoriamente o Código Gray em vez da sequência binária natural?
2. Como as condições "don't care" (X) influenciam a otimização do circuito e o tamanho dos agrupamentos?
3. Qual é a relação matemática entre o tamanho de um agrupamento (laço) e a redução da complexidade da expressão booleana final?

Método de simplificação: Mapa de Karnaugh

O Mapa de Karnaugh simplifica expressões de **mintermos** através de um **método gráfico** que identifica **padrões de adjacência lógica** para eliminar variáveis redundantes.

C	B	A	S	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	→ $\bar{C}BA$
1	0	0	0	
1	0	1	1	→ $C\bar{B}A$
1	1	0	1	→ $CB\bar{A}$
1	1	1	1	→ CBA

Organização por adjacência lógica (Código Gray)

O mapa é construído de forma que as células adjacentes (horizontal ou verticalmente) difiram por apenas um bit em suas variáveis de entrada. Essa organização segue o **Código Gray**, garantindo que, ao mover-se de uma célula para a vizinha, apenas o estado de uma variável mude (de 0 para 1 ou vice-versa).

A	B	S
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

	A	\bar{A}
B	11	01
\bar{B}	10	00

Agrupamentos (laços)

O processo de simplificação baseia-se em identificar regiões onde a saída assume o valor lógico 1 e agrupá-los em laços (*loops*). As regras fundamentais para esses agrupamentos são:

- **Tamanho dos Grupos:** Os grupos devem conter obrigatoriamente potências de 2 (1, 2, 4, 8 ou 16 elementos).
- **Maximização:** Os laços devem ser o maior possível para garantir a máxima simplificação; quanto maior o laço, mais variáveis são eliminadas.
- **Flexibilidade:** Os laços podem se sobrepor e também podem "dar a volta" pelas bordas do mapa (adjacência circular).

Agrupamentos (laços)

O processo de simplificação baseia-se em identificar regiões onde a saída assume o valor lógico 1 e agrupá-los em laços (*loops*). As regras fundamentais para esses agrupamentos são:

- **Tamanho dos Grupos**
- **Maximização**
- **Flexibilidade**

A	B	S
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

	A	\bar{A}
B	0 ¹¹	0 ⁰¹
\bar{B}	1 ¹⁰	1 ⁰⁰

	A	\bar{A}
B	0 ¹¹	0 ⁰¹
\bar{B}	1 ¹⁰	1 ⁰⁰

Eliminação de variáveis

A simplificação ocorre quando uma variável aparece dentro de um mesmo laço tanto em sua forma **complementada** (0) quanto **não complementada** (1). Como essas formas se anulam logicamente ($A+A'=1$), a variável "desaparece" da expressão resultante.

O impacto da simplificação depende do número de elementos no grupo:

- **Par (2 células):** Elimina 1 variável da expressão do mintermo.
- **Quadra (4 células):** Elimina 2 variáveis.
- **Oitava (8 células):** Elimina 3 variáveis.

Eliminação de variáveis

A simplificação ocorre quando uma variável aparece dentro de um mesmo laço tanto em sua forma **complementada** (0) quanto **não complementada** (1). Como essas formas se anulam logicamente ($A+A^c=1$), a variável "desaparece" da expressão resultante.

O impacto da simplificação depende do número de elementos no grupo:

- **Par (2 células):** Elimina 1 variável da expressão do mintermo.

A	B	S
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

	A	\bar{A}
B	0 ¹¹	0 ⁰¹
\bar{B}	1 ¹⁰	1 ⁰⁰

	A	\bar{A}
B	0 ¹¹	0 ⁰¹
\bar{B}	1 ¹⁰	1 ⁰⁰

$$S = \bar{A}\bar{B} + A\bar{B}$$

$$S = \bar{B}(\bar{A} + A)$$

$$S = \bar{B} \cdot 1$$

$$S = \bar{B}$$

Eliminação de variáveis

A simplificação ocorre quando uma variável aparece dentro de um mesmo laço tanto em sua forma **complementada** (0) quanto **não complementada** (1). Como essas formas se anulam logicamente ($A+A^c=1$), a variável "desaparece" da expressão resultante.

O impacto da simplificação depende do número de elementos no grupo:

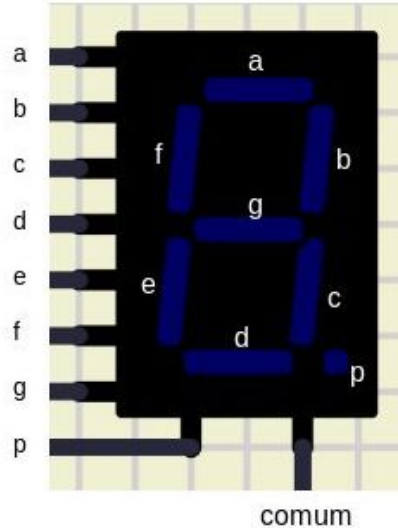
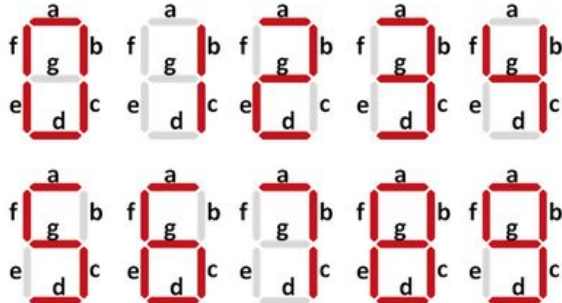
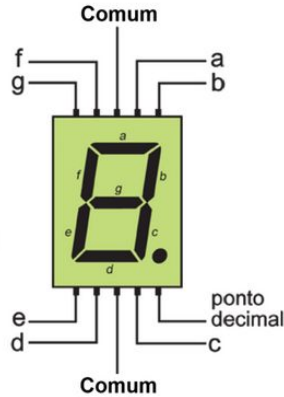
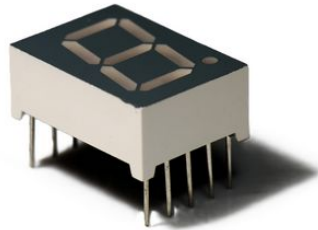
- **Par (2 células):** Elimina 1 variável da expressão do mintermo.

C	B	A	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

	A	\bar{A}	A
B	1 1 1 1	1 1 0 1	0 1 0 0
\bar{B}	1 0 1 1	1 0 0 0	0 0 0 0
	C	\bar{C}	

	\bar{B}	B	\bar{B}
\bar{C}	0 0 1 0	0 1 1 1	0 1 0 0
C	1 0 1 1	1 1 1 1	1 1 0 1
	A	\bar{A}	

Casos Irrelevantes (*don't care*)



Digito	Segmentos										Hexadecimal		
	D	C	B	A	p	g	f	e	d	c		b	a
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0x3F
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0x06
2	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0x5B
3	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0x4F
4	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0x66
5	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0x6D
6	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0x7D
7	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0x07
8	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0x7F
9	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0x6F
A	1	0	1	0	-	-	-	-	-	-	-	-	
b	1	0	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	
C	1	1	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	
d	1	1	0	1	-	-	-	-	-	-	-	-	
E	1	1	1	0	-	-	-	-	-	-	-	-	
F	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	

Casos Irrelevantes (*don't care*)

Digito	Segmentos								Hexadecimal				
	D	C	B	A	p	g	f	e		d	c	b	a
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0x3F
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0x06
2	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0x5B
3	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0x4F
4	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0x66
5	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0x6D
6	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0x7D
7	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0x07
8	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0x7F
9	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0x6F
A	1	0	1	0	-	-	-	-	-	-	-	-	
b	1	0	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	
C	1	1	0	0	-	-	-	-	-	-	-	-	
d	1	1	0	1	-	-	-	-	-	-	-	-	
E	1	1	1	0	-	-	-	-	-	-	-	-	
F	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	

	\bar{A}	A	\bar{A}	
\bar{B}	1100	1101	1001	1000
B	1110	1111	1011	1010
\bar{B}	0110	0111	0011	0010
B	0100	0101	0001	0000

c \bar{c}

	\bar{A}	A	\bar{A}	
\bar{B}	1100	1101	1001	1000
B	-	-	1	1
\bar{B}	1110	1111	1011	1010
B	-	-	-	-
\bar{B}	0110	0111	0011	0010
B	1	1	1	1
\bar{B}	0100	0101	0001	0000
B	0	1	0	1

c \bar{c}

	\bar{A}	A	\bar{A}	
\bar{B}	1100	1101	1001	1000
B	-	-	1	1
\bar{B}	1110	1111	1011	1010
B	-	-	-	-
\bar{B}	0110	0111	0011	0010
B	1	1	1	1
\bar{B}	0100	0101	0001	0000
B	0	1	0	1

c \bar{c}

$$a = B + D + CA + \bar{C}\bar{A}$$

Perguntas Mediadoras

1. Por que a organização das células no Mapa de Karnaugh deve seguir obrigatoriamente o Código Gray em vez da sequência binária natural?
2. Como as condições "don't care" (X) influenciam a otimização do circuito e o tamanho dos agrupamentos?
3. Qual é a relação matemática entre o tamanho de um agrupamento (laço) e a redução da complexidade da expressão booleana final?

Exercício 1 Simplificação de Mintermos (3 Variáveis)

Dada a expressão booleana abaixo, preencha o Mapa de Karnaugh de três variáveis (A, B, C) e determine a expressão simplificada final. Lembre-se de que a organização das células deve seguir o **Código Gray** (00, 01, 11, 10).

$$S = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + A\bar{B}C + ABC + ABC\bar{C}$$

Exercício 2: Conversão de Tabela-Verdade para Mapa K (3 Variáveis)

A partir da tabela-verdade fornecida, monte o Mapa de Karnaugh e obtenha a função lógica simplificada.

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Exercício 3: Otimização de Sistema com 4 Variáveis

Projete a lógica simplificada para um sistema de quatro variáveis (A, B, C, D) onde a saída assume valor lógico 1 para os seguintes mintermos:

Mintermos (m): $\sum m(0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 14)$

Exercício 4: Uso de Condições "Don't Care" (X)

Em projetos de hardware, como decodificadores de BCD para sete segmentos, algumas combinações de entrada nunca ocorrem ou são irrelevantes. Utilize o Mapa K de quatro variáveis (P, Q, R, S) para simplificar a função abaixo, tratando os "X" como 1 sempre que ajudarem a expandir um laço.

- **Segmento C: Mintermos (1):** $m_0, m_1, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9$
- **Don't Cares (X):** $m_{10}, m_{11}, m_{12}, m_{13}, m_{14}, m_{15}$

Exercício 5: Ainda usando condições "Don't Care" (X)

Da mesma forma que o exercício anterior, defina os mintermos (1) para os segmentos do conversor (BCD para 7 segmentos) e utilizando o Mapa K de quatro variáveis (P, Q, R, S), simplifique as funções:

- **Segmento b: Mintermos (1):**
- **Segmento d: Mintermos (1):**
- **Segmento e: Mintermos (1):**
- **Segmento f: Mintermos (1):**
- **Segmento g: Mintermos (1):**

Para todos use:

- **Don't Cares (X):** $m_{10}, m_{11}, m_{12}, m_{13}, m_{14}, m_{15}$

Digito	P, Q, R, S	Segmentos							Hexadecimal		
		p	g	f	e	d	c	b		a	
0	0 0 0 0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0x3F
1	0 0 0 1	0	0	0	0	0	1	1	0		0x06
2	0 0 1 0	0	1	0	1	1	0	1	1		0x5B
3	0 0 1 1	0	1	0	0	1	1	1	1		0x4F
4	0 1 0 0	0	1	1	0	0	1	1	0		0x66
5	0 1 0 1	0	1	1	0	1	1	0	1		0x6D
6	0 1 1 0	0	1	1	1	1	1	0	1		0x7D
7	0 1 1 1	0	0	0	0	0	1	1	1		0x07
8	1 0 0 0	0	1	1	1	1	1	1	1		0x7F
9	1 0 0 1	0	1	1	0	1	1	1	1		0x6F
A	1 0 1 0	-	-	-	-	-	-	-	-		
b	1 0 1 1	-	-	-	-	-	-	-	-		
C	1 1 0 0	-	-	-	-	-	-	-	-		
d	1 1 0 1	-	-	-	-	-	-	-	-		
E	1 1 1 0	-	-	-	-	-	-	-	-		
F	1 1 1 1	-	-	-	-	-	-	-	-		

Referências

- GOMES, P. S. **Controle e Automação Industrial III**. Disponível em:
<<https://controleeautomacaoindustrial3.blogspot.com/2012/>>. Acesso em: 19 jan. 2026.
- MARIANA,LUCAS, JUAN. **Primeira Geração - Computadores a válvula e relé**. Disponível em:
<<https://museuvirtualufpr.blogspot.com/2011/12/primeira-geracao-computadores-valvula-e.html>>. Acesso em: 19 jan. 2026.
- TOCCI, Ronald J.; WIDMER, Neal S. **Sistemas Digitais: Princípios e Aplicações**. 8. ed. Pearson, 2015.
- PALANIAPPAN, Ramaswamy. **Digital Systems Design**. bookboon.com, 2011.
- TRINDADE JUNIOR, Rosumiro; JULIÃO, Jodelson Moreira. **Circuitos Digitais**. Manaus: Centro de Educação Tecnológica do Amazonas (CETAM), 2012

Sistemas Digitais

Profº José W. R. Pereira

jose.pereira@ifsp.edu.br

josewrpereira.github.io/docs

